

# « ABD », une loi de comportement des géomatériaux, incrémentalement non linéaire, et adaptée aux éléments finis déplacements

M. BOULON,  
A. ALACHAHER

Laboratoire 3S  
Sols, Solides,  
Structures  
Domaine Universitaire  
B.P. 53  
38041 Grenoble  
Cedex 9 France

## Résumé

A partir de leur expérience concernant l'utilisation en éléments finis déplacements d'une loi de comportement incrémentalement non linéaire pour les géomatériaux (Darve [11], [10]), nécessitant des itérations constitutives pour décrire un chemin non purement défini en contraintes, les auteurs proposent une nouvelle loi de comportement permettant d'éviter ces itérations constitutives. Cette loi est une généralisation des lois d'interfaces sols-structures (Boulon *et al* [4]), dont les traits marquants sont leur capacité à prendre en compte un nombre non limité de chemins d'identification et l'absence d'itérations constitutives pour un chemin entièrement défini en déformations (d'où son intérêt en éléments finis déplacements) et dont le détail est exposé par Alachaher [1]. L'écriture générale de cette loi de comportement est tout d'abord présentée, l'accent étant mis sur l'interpolation rhéologique tridimensionnelle. Les formulations analytiques des chemins de base, triaxiaux drainés généralisés, sont empruntées à Darve [10]. Les performances du modèle sur chemins biaxiaux de révolution non drainés ainsi que drainés, œdométrique et isotrope sont comparées à celles du modèle initial de Darve, et permettent d'envisager favorablement le passage aux éléments finis.

## Abstract

The authors start from their experience about the utilization of an incrementally non linear constitutive law for geomaterials (Darve [11], [10]) in finite elements by displacement method, requiring directional iterations for integrating a loading path not purely defined in terms of a stress history. They propose a new constitutive model which allows for saving these constitutive iterations. This model is obtained by a generalization of the soil-structure interface laws (Boulon *and al* [4]), using a three-dimensional constitutive interpolation and by using a part of the formulation proposed by Darve [10]. An other advantage of this model is its ability to incorporate an unlimited number of identification paths. The detail of this constitutive model is exposed by Alachaher [1]. The first part of this paper shows the general formulation of this model. The second part, shows an identification and a validation of this new model for global loading paths. The performances of this model on drained, undrained, oedometric and isotropic paths are compared with those of the initial model of Darve. These tests are encouraging for moving up into finite element applications.

## Introduction

Dans tout cet article, le terme contrainte désignera la contrainte intergranulaire. La formulation incrémentale non linéaire générale des lois de comportement pour les matériaux non visqueux peut s'écrire (Darve [10]) :

$$d\epsilon_i = M_{ij}(u_k) d\sigma_j \quad (1)$$

où  $d\epsilon_i$  et  $d\sigma_j$  sont respectivement les composantes des tenseurs incrément de déformation et incrément de contrainte,  $M_{ij}(u_k)$  est la matrice constitutive « tangente » au chemin défini par  $u_k$ , et  $u_k$  est le vecteur des directions des contraintes incrémentales. Cette écriture implique une non-linéarité liée à la dépendance directionnelle de la matrice constitutive  $M_{ij}$ . Il est clair que pour être utilisée en éléments finis classiques (déplacements), cette formulation nécessite une recherche directionnelle itérative pour la classe des chemins définis en vitesse de déformations. Les quelques modèles incrémentaux de type interpolation (Chambon *et al.* [8], Darve [10] et Di Benedetto *et al.* [16]) sont tous assujettis à cette contrainte.

Les modèles à non linéarité dépendant explicitement de la vitesse de déformation sont libérés de cette contrainte. C'est le cas des modèles incrémentaux (Kolymbas [19], [20] et Gudehus [17], Cloe (Charlier *et al.* [7], et Desrues *et al.* [14], [15])), des modèles endochroniques (Valanis [24], Bazant [3], Cuellar [9], Lanier [22]) et des modèles élasto-plastiques exprimés de manière telle que la relation constitutive soit explicitement inversible (Prevost [23], Aubry *et al.* [2], Hujeux [18]).

Nous utiliserons dans toute la suite les notations suivantes : les tenseurs incréments de contraintes  $d\sigma$  et incréments de déformation  $d\epsilon$  seront représentés par commodités sous la forme des pseudo-vecteurs :

$$\underline{d\sigma} = \begin{pmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ \sqrt{2}d\sigma_{12} \\ \sqrt{2}d\sigma_{23} \\ \sqrt{2}d\sigma_{31} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{d\epsilon} = \begin{pmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\epsilon_{22} \\ d\epsilon_{33} \\ \sqrt{2}d\epsilon_{12} \\ \sqrt{2}d\epsilon_{23} \\ \sqrt{2}d\epsilon_{31} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Le matériau étant supposé initialement isotrope, nous nous limiterons à l'étude des sollicitations non rotationnelles, c'est-à-dire excluant une rotation des directions principales des contraintes et des déformations. Les pseudo-vecteurs précédents seront alors conventionnellement représentés d'une manière simplifiée, en supprimant leurs composantes identiquement nulles :

$$\underline{d\sigma} = \begin{pmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ou plus simplement} \quad \begin{pmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\underline{d\epsilon} = \begin{pmatrix} d\epsilon_{11} \\ d\epsilon_{22} \\ d\epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ou plus simplement} \quad \begin{pmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\epsilon_3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Compte tenu de ces notations, la loi de Darve [10] définie par l'équation (1) et ci-après dénommée « D » ne permet pas d'avoir directement la réponse si le chemin de sollicitation est entièrement défini en termes de vitesse de déformation. Des itérations directionnelles souvent coûteuses sont nécessaires pour réaliser la convergence de la réponse incrémentale (Boulon *et al.* [6]). Ceci est le cas courant en éléments finis déplacements. Pour pallier cet inconvénient, nous proposons un nouveau schéma d'interpolation visant à obtenir la réponse incrémentale sans recherche directionnelle lorsque le chemin est défini en vitesse de déformation. Ce schéma repose sur des chemins élémentaires de base définis dans l'espace des déformations incrémentales  $d\epsilon$ . Cette nouvelle loi sera dénommée dans toute la suite « ABD ».

Nous présentons tout d'abord l'écriture de la loi « ABD », basée sur une interpolation rhéologique entre des chemins de base (non régulièrement répartis dans l'espace des déformations incrémentales).

Le calcul des fonctions de pondération relatives à ces chemins est ensuite décrit. Il a fait l'objet de plusieurs écritures successives, qui sont résumées. Après un exposé de l'organigramme général d'intégration de la loi, nous présentons des comparaisons des résultats donnés par les lois « ABD » et « D », au niveau de la réponse incrémentale, de la réponse globale, pour des chemins biaxial de révolution non drainé, biaxial de révolution drainé, oedométrique et enfin isotrope, pour plusieurs niveaux initiaux de contrainte. Les lois « ABD » et « D » utilisent les mêmes formulations analytiques des chemins de base et les mêmes matrices tangentes sur ces chemins de base.

## 2

## Écriture générale de la loi « ABD »

## 2.1

### Généralités

Soit un matériau dans un état fixé, et  $d\epsilon$  une sollicitation incrémentale sur ce matériau, à laquelle correspond une réponse incrémentale  $d\sigma$ . On suppose connaître expérimentalement  $N$  chemins incrémentaux  $\tau$  ( $d\epsilon_i, d\sigma_i$ ) ( $i = 1, N$ ) indépendants sur ce matériau. La notion d'interpolation rhéologique est liée à la définition de la distance  $d$  entre chemins incrémentaux, dans un espace à définir. L'espace le plus adapté à cette définition est certainement celui des sollicitations incrémentales. Nous conviendrons de nommer  $d_i$  la distance entre  $d\epsilon$  et  $d\epsilon_i$  :

$$d_i = d(d\epsilon - d\epsilon_i) \quad (5)$$

et  $W_i$  le poids du chemin  $n^o i$  dans l'interpolation, fonction de  $d_i$ . Les fonctions  $W_i$  vérifient obligatoirement les relations fondamentales caractérisant une interpolation :

$$W_i(d_i = 0) = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} : \text{symbole de Kronecker}) \quad (6)$$

A partir de là, plusieurs interpolations rhéologiques sont possibles : deux bases différentes des fonctions  $W_i$  vérifiant les équations (5) et (6) conduiront à deux interpolations différentes. Par ailleurs, l'interpolation peut opérer soit sur les réponses  $d\sigma_i$  (cas le plus courant), soit sur les matrices de passage de  $d\epsilon_i$  vers  $d\sigma_i$  si on les sup-

pose connues. Nous avons choisi cette seconde classe d'interpolation qui, dans les conditions fixées précédemment, est la seule qui nous permette d'atteindre le but visé.

Dans le cas présent, la nouvelle interpolation est basée sur six\* chemins de base, le chemin de réponse étant le pseudo-vecteur incrément de contrainte  $d\sigma$  et le chemin de sollicitation, le pseudo-vecteur incrément de déformation  $d\varepsilon$ ; cette interpolation s'exprime par la somme pondérée suivante :

$$d\sigma = \sum_{i=1}^6 W_i \underline{D}_i d\varepsilon = \underline{D} d\varepsilon \quad (7)$$

où :  $i$  représente le numéro du chemin incrémental de base ( $i = 1$  à  $6$ ).  $\underline{D}_i$  représente la matrice constitutive associée au chemin incrémental de base  $n^{\circ}i$ .

## 2.2

### Notions essentielles

#### 2.2.1

#### Chemins de base

Afin d'être comparés entre eux, les chemins sont normalisés grâce à la norme du pseudo-vecteur incrément de déformation.

Un chemin incrémental de base  $n^{\circ}i$  est alors défini par les deux triplets :

\* Le nombre de chemins de base pourrait être différent et notamment supérieur, mais nous nous sommes astreints à utiliser les données expérimentales classiques de la géomécanique.

**TABLEAU I** Récapitulation des paramètres relatifs aux six chemins de base ( $\xi_1, \eta_2, \zeta_3, \xi_4, \eta_5, \zeta_6 \geq 0$ ).  
The set of parameters of the six basic paths.

chemin de base $n^{\circ}$	sollicitation incrémentale $\lambda \quad \mu \quad \nu$	réponse incrémentale $\xi \quad \eta \quad \zeta$	remarques
1	$\lambda_1 \quad \mu_1 \quad \nu_1$	$\xi_1 \quad 0 \quad 0$	compression dans la direction 1 extension dans la direction 2 extension dans la direction 3 extension dans la direction 1 compression dans la direction 2 compression dans la direction 3
2	$\lambda_2 \quad \mu_2 \quad \nu_2$	$0 \quad -\eta_2 \quad 0$	
3	$\lambda_3 \quad \mu_3 \quad \nu_3$	$0 \quad 0 \quad -\zeta_3$	
4	$\lambda_4 \quad \mu_4 \quad \nu_4$	$-\xi_4 \quad 0 \quad 0$	
5	$\lambda_5 \quad \mu_5 \quad \nu_5$	$0 \quad \eta_5 \quad 0$	
6	$\lambda_6 \quad \mu_6 \quad \nu_6$	$0 \quad 0 \quad \zeta_6$	

#### 2.2.2

#### Particularité des chemins de base

Ainsi que nous l'avons indiqué précédemment, les points de base 1 à 6 se déplacent sur la sphère unité dans l'espace des sollicitations incrémentales au cours de la sollicitation (lorsque l'état du matériau varie). Ils sont inégalement répartis sur cette sphère en raison de la nature même de ces chemins (triaxiaux généralisés). Ils

$$\text{sollicitation incrémentale } \begin{Bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \end{Bmatrix}_i \quad \text{et réponse incrémentale } \begin{Bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \end{Bmatrix}_i$$

Soit encore après normalisation :

$$\text{sollicitation incrémentale normée } \begin{Bmatrix} \lambda_i \\ \mu_i \\ \nu_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{d\varepsilon_1}{\|d\varepsilon\|} \\ \frac{d\varepsilon_2}{\|d\varepsilon\|} \\ \frac{d\varepsilon_3}{\|d\varepsilon\|} \end{Bmatrix}_i$$

$$\text{et réponse incrémentale normée } \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \\ \zeta_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{d\sigma_1}{\|d\sigma\|} \\ \frac{d\sigma_2}{\|d\sigma\|} \\ \frac{d\sigma_3}{\|d\sigma\|} \end{Bmatrix}_i$$

Le choix précédent de normalisation impose que toutes les sollicitations incrémentales possibles sont situées sur la sphère unité de l'espace  $(\lambda \mu \nu)$ . Les chemins de base étant des triaxiaux généralisés, le tableau I récapitule le paramétrage correspondant.

seraient au contraire parfaitement répartis s'il s'agissait de chemins oedométriques généralisés ( $\dot{\varepsilon}_i \neq 0, \dot{\varepsilon}_j = \dot{\varepsilon}_k = 0, i \neq j \neq k = 1, 2, 3$ ). On voit ainsi que les différentes sollicitations incrémentales possibles interviennent à travers leur direction dans cet espace.

En revanche, dans l'espace des réponses incrémentales, les points de base se déplacent sur leur demi-axe respectif au cours de la sollicitation (cf. Fig. 1).

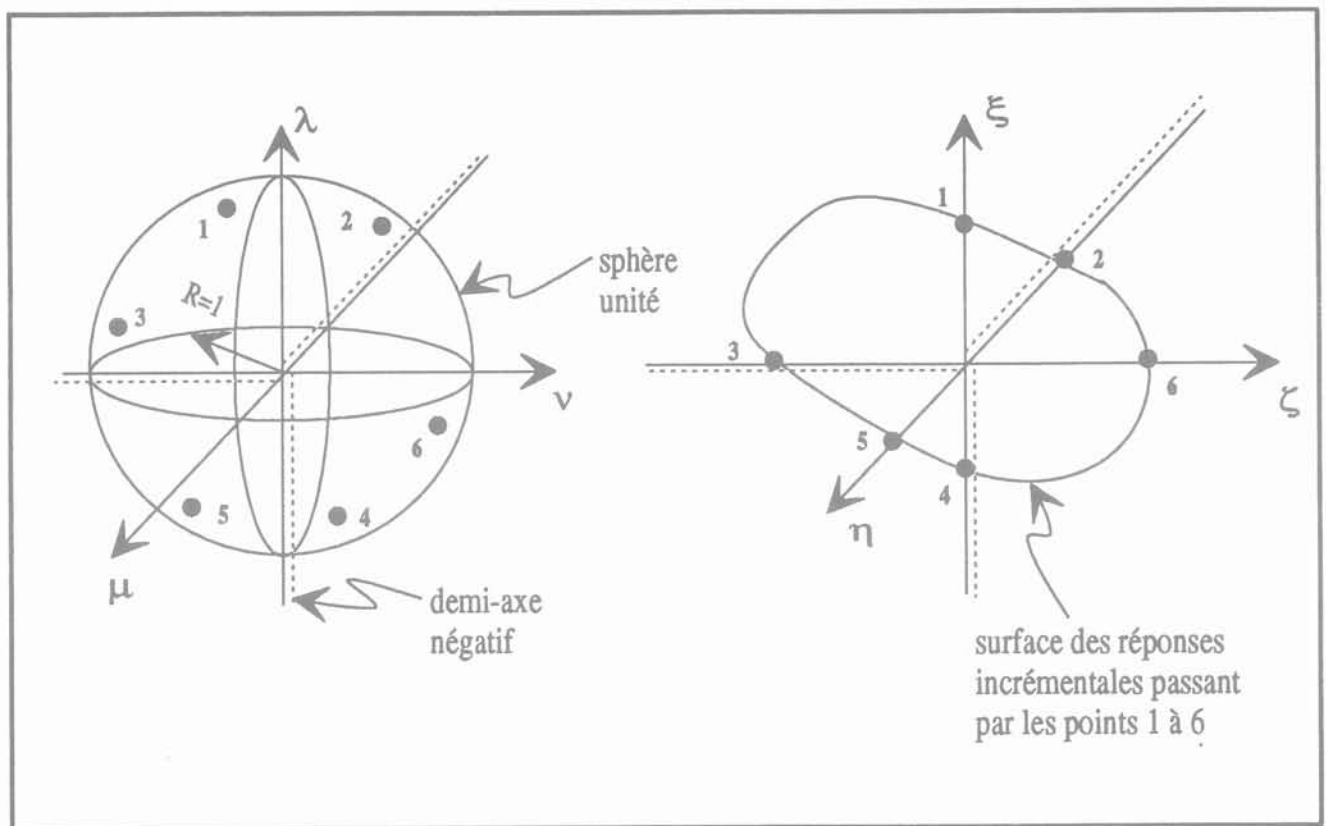


FIG. 1 Espace des sollicitations et des réponses incrémentales, et chemins de base n° 1 à 6.  
Incremental loading and response spaces and basic paths.

Utilisant les notations adoptées par Darve [10] concernant les pseudo-coefficients de Poisson <sup>(1)</sup>, nous pouvons préciser les valeurs de  $\lambda_i$ ,  $\mu_i$  et  $\nu_i$  pour les chemins de base  $i = 1$  à 6 (cf. Tableau II).

### 2.2.3

#### Distance angulaire entre chemin courant et l'un des chemins de base

Dans l'espace des sollicitations incrémentales, nous désignerons par direction courante  $\underline{d}$  (à laquelle correspond, *a priori* une réponse inconnue) une direction différente des chemins de base  $\underline{d}^{(i)}$ . La distance angulaire  $\alpha_i$  entre le chemin courant  $\underline{d}$  et le chemin de base  $\underline{d}^{(i)}$  est définie comme l'écart angulaire entre ces deux directions (valeur arithmétique), soit avec les notations de la figure 2 :

$$\alpha_i = 2 \arcsin \frac{\|\underline{d} - \underline{d}^{(i)}\|_2}{2} \quad (8)$$

$$v_j^i = - \begin{pmatrix} \varepsilon_{ij}^+ \\ \varepsilon_{jj} \end{pmatrix}_{j \neq i} \quad (\text{sollicitation en compression dans la direction } j \neq i)$$

$$v_j^i = - \begin{pmatrix} \varepsilon_{ij}^- \\ \varepsilon_{jj} \end{pmatrix}_{j \neq i} \quad (\text{sollicitation en extension dans la direction } j \neq i)$$

où l'opérateur  $\|\cdot\|_2$  désigne la norme  $L^2$ .

Nous imposons de plus une détermination de  $\alpha_i$  telle que :

$$0 \leq \alpha_i \leq +\pi \quad (9)$$

### 2.3

#### Interpolation rhéologique

La construction de la matrice constitutive  $\underline{D}$  correspondant au triplet  $(\lambda, \mu, \nu)$  exige la connaissance des matrices de base  $\underline{D}_i$  correspondant à chacune des directions de base, ainsi que le calcul des poids  $W_i$  correspondants.

#### 2.3.1

##### Matrices constitutives de base ( $\underline{D}_i$ )

Les matrices  $\underline{D}_i$  sont calculables par inversion des matrices  $\underline{M}_i$  de rang 3 de la loi « D » (Darve [10]) :

$$\underline{D}_i = \underline{M}_i^{-1} = \left\{ \frac{1}{2} (\underline{N}^+ + \underline{N}^-) + \frac{1}{2} (\underline{N}^+ - \underline{N}^-) \underline{n}_{d\sigma}^{(i)} \right\}^{-1} \quad (10)$$

où :  $\underline{n}_{d\sigma}^{(i)}$  représente le « tenseur des directions d'incrément de contrainte » pour les chemins de base ;

$\underline{N}^+$  et  $\underline{N}^-$  sont les matrices dépendant des paramètres d'état ainsi que des modules triaxiaux tangents  $E_i$  et coefficients de Poisson tangent  $\nu_j^i$ , respectivement en compression et en extension. Il est clair que ces matrices évoluent, du fait de l'évolution de l'état et de la sollici-

chemin de base $n^{\circ}$	paramètres directeurs	$r$	cosinus directeurs
1	$\begin{Bmatrix} +1 \\ -\nu_1^{2+} \\ -\nu_1^{3+} \end{Bmatrix}$	$r_1 = [1 + (\nu_1^{2+})^2 + (\nu_1^{3+})^2]^{1/2}$	$\lambda_1 = +1/r_1$ $\mu_1 = -\nu_1^{2+}/r_1$ $\nu_1 = -\nu_1^{3+}/r_1$
2	$\begin{Bmatrix} +\nu_2^{1-} \\ -1 \\ +\nu_2^{3-} \end{Bmatrix}$	$r_2 = [1 + (\nu_2^{1-})^2 + (\nu_2^{3-})^2]^{1/2}$	$\lambda_2 = \nu_2^{1-}/r_2$ $\mu_2 = -1/r_2$ $\nu_2 = \nu_2^{3-}/r_2$
3	$\begin{Bmatrix} +\nu_3^{1-} \\ +\nu_3^{2-} \\ -1 \end{Bmatrix}$	$r_3 = [1 + (\nu_3^{1-})^2 + (\nu_3^{2-})^2]^{1/2}$	$\lambda_3 = \nu_3^{1-}/r_3$ $\mu_3 = \nu_3^{2-}/r_3$ $\nu_3 = -1/r_3$
4	$\begin{Bmatrix} -1 \\ +\nu_1^{2-} \\ +\nu_1^{3-} \end{Bmatrix}$	$r_4 = [1 + (\nu_1^{2-})^2 + (\nu_1^{3-})^2]^{1/2}$	$\lambda_4 = -1/r_4$ $\mu_4 = \nu_1^{2-}/r_4$ $\nu_4 = \nu_1^{3-}/r_4$
5	$\begin{Bmatrix} -\nu_2^{1+} \\ +1 \\ -\nu_2^{3+} \end{Bmatrix}$	$r_5 = [1 + (\nu_2^{1+})^2 + (\nu_2^{3+})^2]^{1/2}$	$\lambda_5 = -\nu_2^{1+}/r_5$ $\mu_5 = +1/r_5$ $\nu_5 = -\nu_2^{3+}/r_5$
6	$\begin{Bmatrix} -\nu_3^{1+} \\ -\nu_3^{2+} \\ +1 \end{Bmatrix}$	$r_6 = [1 + (\nu_3^{1+})^2 + (\nu_3^{2+})^2]^{1/2}$	$\lambda_6 = -\nu_3^{1+}/r_6$ $\mu_6 = -\nu_3^{2+}/r_6$ $\nu_6 = +1/r_6$

tation, d'un incrément à un autre ; elles sont définies comme suit :

$$\underline{\underline{N}}^+ = \begin{bmatrix} 1/E_1^+ & -\nu_2^{1+}/E_2^+ & -\nu_3^{1+}/E_3^+ \\ -\nu_1^{2+}/E_1^+ & 1/E_2^+ & -\nu_3^{2+}/E_3^+ \\ -\nu_1^{3+}/E_1^+ & -\nu_2^{3+}/E_2^+ & 1/E_3^+ \end{bmatrix} \quad (11)$$

et de même pour  $\underline{\underline{N}}^-$ , en substituant le signe (-) au signe (+).

### 2.3.2

#### Fonctions de pondération $W_i$

Elles représentent le poids de chaque matrice constitutive  $\underline{\underline{D}}_i$  et donc de chaque chemin de base dans la matrice  $\underline{\underline{D}}$ .

Une interpolation complète et rigoureuse exige une masse imposante de calculs, rendant la loi de comportement lourde à manipuler en termes de temps CPU notamment en éléments finis. Ainsi, Chambon *et al.* [8] a proposé plusieurs formes d'interpolation utilisant plusieurs « éléments rhéologiques » conduisant à une continuité  $C_0$  de la réponse. Nous avons choisi une interpolation simplifiée d'une part et utilisant un seul « élément rhéologique » d'autre part afin d'assurer une continuité automatique de la réponse. Nous verrons plus loin que la simplification en question rend parfois la réponse incrémentale anguleuse, ce qui n'est pas gênant si la gamme des chemins réellement utilisés pour le calcul se situe hors de cette zone. De toute manière, le choix d'une interpolation est un compromis, qu'il faut parfois remettre en question.

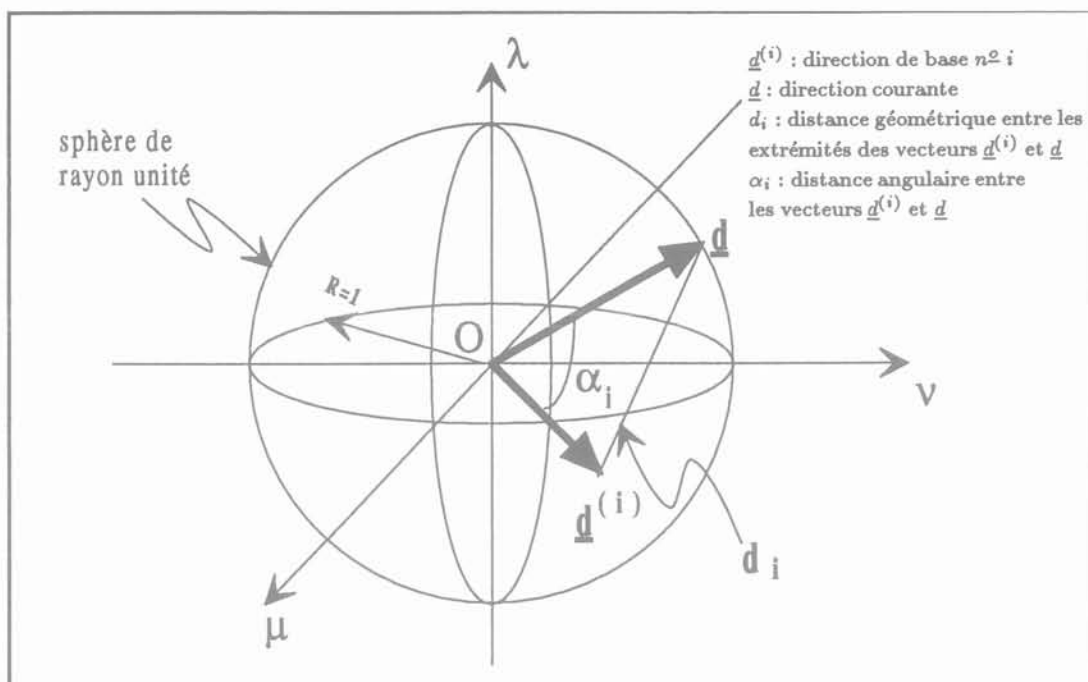


FIG. 2 Définition de la distance angulaire  $\alpha_i$  dans l'espace des sollicitations incrémentales.  
Definition of the angular distance  $\alpha_i$  in the incremental loading space.

### Définition des fonctions $W_i$

La présente approche doit être en mesure de modéliser tout comportement, du plus simple au plus complexe, le plus simple étant l'élasticité linéaire isotrope correspondant à :

$$\underline{D}_i = \underline{D} \quad (\forall i = 1 \text{ à } 6) \quad (12)$$

Dans ces conditions, la relation (7) implique (condition classique à vérifier par une interpolation) :

$$\sum_{i=1}^6 W_i = 1 \quad (13)$$

L'expérience de l'interpolation nous a appris que des poids  $W_i$  tous positifs nuisent à la convexité de la réponse incrémentale.

Le sens physique impose de plus que le poids d'un chemin de base proche du chemin courant soit élevé, et que le poids d'un chemin de base éloigné du chemin courant soit faible, ce que nous traduisons par la relation :

$$y_i W_i (\alpha_i)^x = \text{Cte} \quad (14)$$

avec :

$x$  : coefficient de forme caractérisant la courbure des fonctions d'interpolation ;

$y_i$  : fonction imposant son signe à la fonction de pondération  $W_i$ .

### Expression analytique des fonctions $W_i$

Des équations (13) et (14), il vient :

$$\frac{W_1}{\frac{1}{y_1 \alpha_1^x}} = \frac{W_2}{\frac{1}{y_2 \alpha_2^x}} = \dots = \frac{\sum_{i=1}^6 W_i}{\sum_{i=1}^6 \frac{1}{y_i \alpha_i^x}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^6 \frac{1}{y_i \alpha_i^x}} \quad (15)$$

d'où finalement :

$$W_i = \left[ \sum_{j=1}^6 \frac{y_j}{y_i} \left( \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \right)^x \right]^{-1} \quad (16)$$

Pour  $\alpha_i = 0$  avec  $j \neq i$ ,  $W_i = 0$ . Les fonctions d'interpolation  $W_i$  vérifient donc toutes les relations classiques bien connues en éléments finis, la notion de nœuds étant ici remplacée par celle de chemin de base. Nous allons montrer ci-après que le choix des fonctions  $y_i$  est délicat, en présentant une première formulation non satisfaisante, et une seconde, plus satisfaisante en termes de régularité de la réponse incrémentale.

### Première formulation des fonctions $y_i$

Cette première formulation a été utilisée avec succès pour la loi incrémentale non linéaire 2D décrivant le comportement des interfaces sols-structures (Boulon et al. [4], Boulon et Garnica [5]). La fonction  $y_i$  est la fonction signe, pouvant prendre les valeurs +1 et -1 (+1 au voisinage du chemin de base  $i$  et -1 ailleurs). On présente à la figure 3 une réponse incrémentale obtenue avec cette première formulation des  $y_i$ . Les points anguleux observés ne traduisent pas une réalité physique ; ils sont dus au fait que les changements de signe des fonctions  $W_j$  accompagnant ceux des fonctions  $y_i$  ne sont pas précédés par une diminution progressive du module des mêmes fonctions  $W_i$  (cf. Fig. 4). On constate toutefois que ces fonctions  $W_i$  varient entre -0,5 et +1,1 lorsque la sollicitation incrémentale décrit le grand cercle situé dans le plan bissecteur ( $\mu = \nu$ ).

### Seconde formulation des fonctions $y_i$

La discontinuité des fonctions  $y_i$  de la première formulation n'est pas préjudiciable à la continuité incrémentale pour un comportement 2D, puisqu'alors les fonctions  $W_i$  s'annulent lorsque les fonctions  $y_i$  chan-

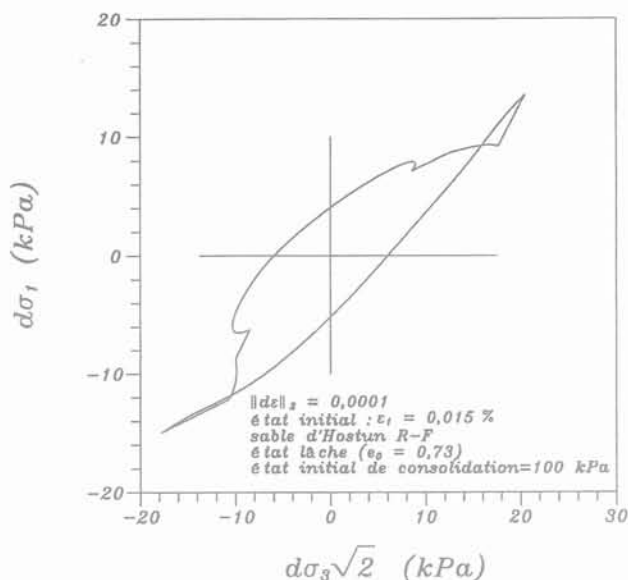


FIG. 3 Réponse incrémentale aux sollicitations incrémentales normées situées dans le plan bissecteur ( $\mu = \nu$ ) à partir d'un état non drainé. Première formulation des  $y_i$ . Incremental response space from an undrained state. First formulation of the  $y_i$  functions.

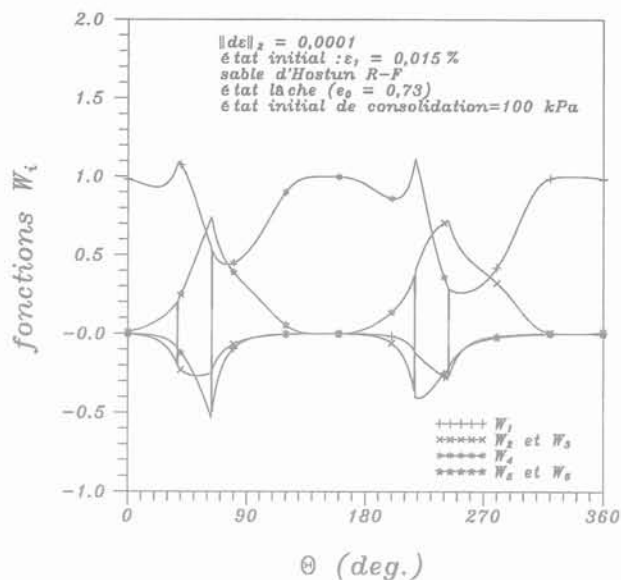


FIG. 4 Fonctions de pondération  $W_i$  ( $y_i$  fonction signe) pour des sollicitations situées dans le plan bissecteur ( $\mu = \nu$ ).  $\theta$  est l'angle entre l'axe  $\lambda$  et la sollicitation incrémentale. Chemin non drainé. Première formulation des  $y_i$ . Evolution of the weight functions  $W_i$ , undrained loading path. First formulation of the functions  $y_i$ .

gent de signe. En revanche, dans le cas d'un comportement 3D, il est clair que les fonctions  $W_i$  doivent pouvoir s'annuler pour des directions non confondues avec l'un des chemins de base, d'où l'idée de faire jouer un second rôle aux fonctions  $y_i$ : celui de régler le module des fonctions  $W_i$  notamment dans les zones de changement de signe.

Posons :

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{6} \sum_i \alpha_i \quad (17)$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_i \alpha_i^2}{6} - \bar{\alpha}^2} \quad (18)$$

$\bar{\sigma}$  est la moyenne algébrique des distances angulaires des chemins de base au chemin considéré ;

$\bar{\alpha}$  est une moyenne des écarts entre les distances  $\alpha_i$  et la moyenne algébrique précédente (au sens d'un écart-type).

Les fonctions  $y_i$  sont la somme de deux fonctions dépendant de la variable réduite :

$$\beta_i = \frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{\bar{\sigma}} \quad (19)$$

– une fonction puissance, prépondérante pour les faibles valeurs de  $|\beta_i|$  ;

– une fonction tanh (tangente hyperbolique), prépondérante pour les valeurs élevées de  $|\beta_i|$ .

L'ensemble s'écrit :

$$y_i = \beta_i^{1-2n} - \tanh(X(\beta_i + k)) \quad (20)$$

$n$  et  $X$  sont des coefficients réels et  $k$  un réel également, qui permet de régler le nombre des fonctions  $y_i$  positives et négatives.

Une étude paramétrique complète a été effectuée afin de déterminer les valeurs optimales de  $x$ ,  $X$ ,  $n$  et  $k$  (valeurs pour lesquelles sera obtenue la meilleure réponse incrémentale s'approchant plus ou moins de celle donnée par la loi « D »).

Plusieurs ensembles fournissent des résultats permettant d'approcher au mieux les réponses incrémentales des géomatériaux. Parmi ceux-ci, nous avons choisi :

$$x = 8, X = 1,5, n = 1,5, k = 1^{(1)}$$

Nous présentons pour cette formulation, aux figures 5, 6, 7 et 8 respectivement : la réponse incrémentale aux sollicitations incrémentales normées situées dans le plan bissecteur ( $\mu = \nu$ ), les fonctions  $\alpha_i$ , les fonctions  $y_i$  et les fonctions de pondération  $W_i$ , pour un ensemble de sollicitations incrémentales normées situées dans le plan bissecteur ( $\mu = \nu$ ) à partir d'un état non drainé par la seconde formulation des  $y_i$ .

La réponse incrémentale, sans être parfaitement régulière, a été considérablement améliorée. Elle pourrait certainement l'être davantage.

(1) Les autres paramètres de la loi pour les différentes densités du sable d'Hostun utilisés sont exposés à l'annexe en fin de cet article. En ce qui concerne la signification de chaque paramètre, nous renvoyons le lecteur à l'article [13].

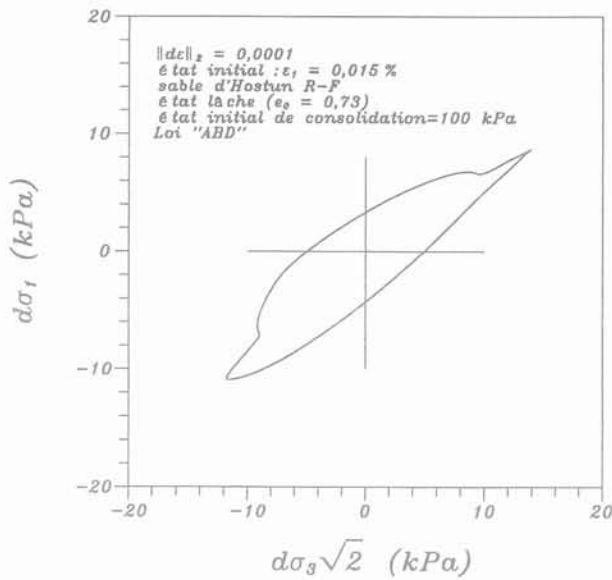


FIG. 5 Réponse incrémentale aux sollicitations incrémentales normées situées dans le plan bissecteur ( $\mu = \nu$ ) à partir d'un état non drainé. Seconde formulation des  $y_i$ . Incremental response space from an undrained state. Second formulation of the  $y_i$  functions.

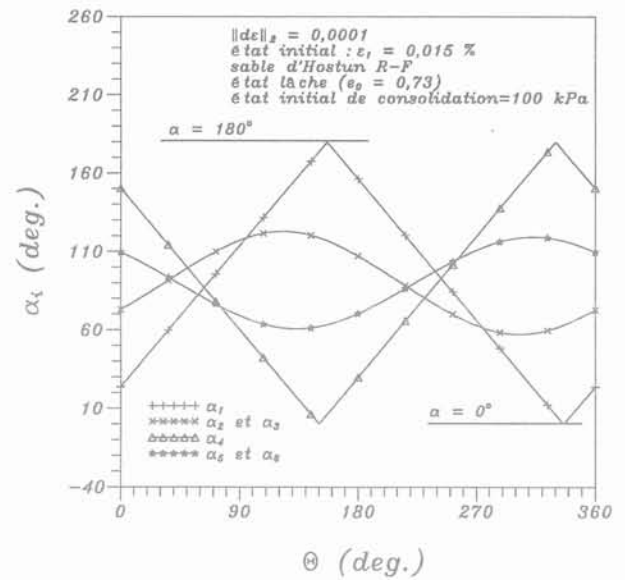


FIG. 6 Les fonctions  $\alpha_i$  pour des sollicitations incrémentales normées situées dans le plan bissecteur ( $\mu = \nu$ ) à partir d'un état non drainé. Seconde formulation des  $y_i$ . (Remarque :  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$  et  $\alpha_6$  ne s'annulent jamais). Evolution of the angular distances  $\alpha_i$  undrained loading path. Second formulation of the  $y_i$  functions (remark :  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$  and  $\alpha_6$  never vanish).

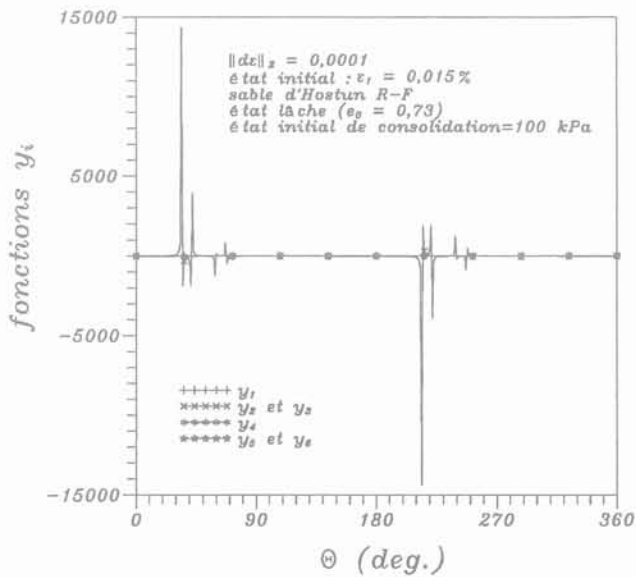


FIG. 7 Les fonctions  $y_i$  pour des sollicitations incrémentales normées situées dans le plan bissecteur ( $\mu = \nu$ ) à partir d'un état non drainé. Seconde formulation des  $y_i$ . Evolution of the functions  $y_i$  undrained loading path. Second formulation of the  $y_i$  functions.

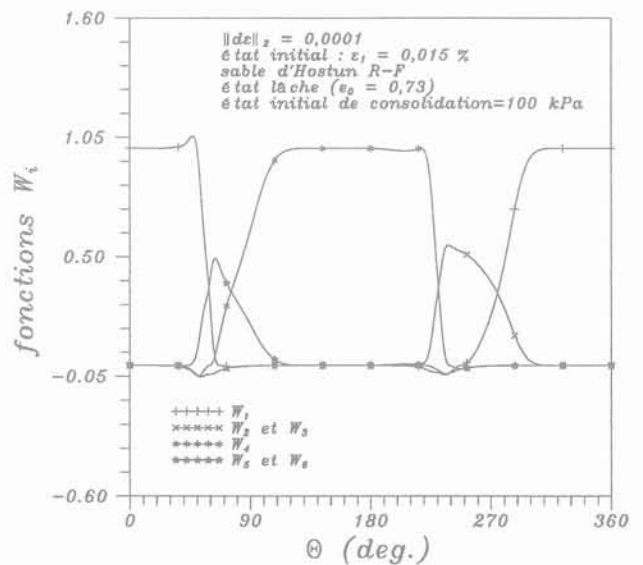


FIG. 8 Les fonctions de pondération  $W_i$  pour des sollicitations incrémentales normées situées dans le plan bissecteur ( $\mu = \nu$ ) à partir d'un état non drainé. Seconde formulation des  $y_i$ . Evolution of the weight functions  $W_i$  undrained loading path. Second formulation of the  $y_i$  functions.



## Organigramme général du traitement

La procédure de fonctionnement et d'intégration numérique de la loi est présentée à la figure 9, pour le cas général où le chemin n'a rien de particulier (n'est pas donné en terme d'histoire des déformations) et où la sollicitation ne comporte pas de rotations des directions principales. En éléments finis classiques (déplacements), les chemins locaux sont particuliers en ce sens qu'ils sont connus en termes d'histoire des déformations, ce qui a pour effet de supprimer les itérations directionnelles. Pour obtenir la réponse incrémentale, il suffit de décrire un ensemble de valeurs de  $\underline{d}$ , pour un même incrément (boucle 2).

Notons que l'algorithme précédent n'est pas fondamentalement différent de celui qui est utilisé par Darve [10], sauf, évidemment, si le chemin est donnée en déformation, ce qui est le cas en éléments finis.

## Validations de la loi « ABD » au niveau incrémental

Dans toute la suite, c'est la seconde formulation des  $y_i$  qui sera utilisée.

### Définition du chemin (sollicitation et réponse)

Nous avons choisi des sollicitations incrémentales situées dans le plan bissecteur ( $d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3$ ) de l'espace des sollicitations incrémentales, chaque sollicitation ayant un module de  $10^{-4}$  à partir de l'état ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ) lui-même situé dans le plan bissecteur des déformations ( $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ). Classiquement (Gudehus [17]), l'ensemble des sollicitations incrémentales est alors représenté par les points du cercle de rayon égal à  $10^{-4}$  de l'espace ( $d\varepsilon_3\sqrt{2}, d\varepsilon_1$ ).

La réponse incrémentale à cette famille de sollicitations est alors dans le plan bissecteur des contraintes ( $d\sigma_2 = d\sigma_3$ ), et est constituée d'une courbe généralement voisine d'une ellipse dans le plan ( $d\sigma_3\sqrt{2}, d\sigma_1$ ) (cf. Fig. 10). Dans notre cas, l'état initial est isotrope.

### Structure détaillée de la réponse

Les distances angulaires  $\alpha_i$  fonctions de l'angle  $\theta$  entre la sollicitation et la direction (1, 0, 0) sont conformes aux valeurs indiquées à la figure 6. Nous constatons que les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_4$  s'annulent une fois alors que les angles  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$  et  $\alpha_6$  ne s'annulent jamais car les chemins de base (2, 3, 5 et 6) ne sont pas situés dans le plan bissecteur ( $d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3$ ) (cf. Fig. 1). Ces distances angulaires sont comprises entre 0 et  $\pi$ . A la figure 11, nous avons représenté l'évolution des fonctions d'interpolation en fonction de  $\theta$ ; elle sont continues, ce qui implique la continuité de la réponse incrémentale malgré les grandes variations (par construction) des fonctions  $y_i$  (cf. Fig. 12).

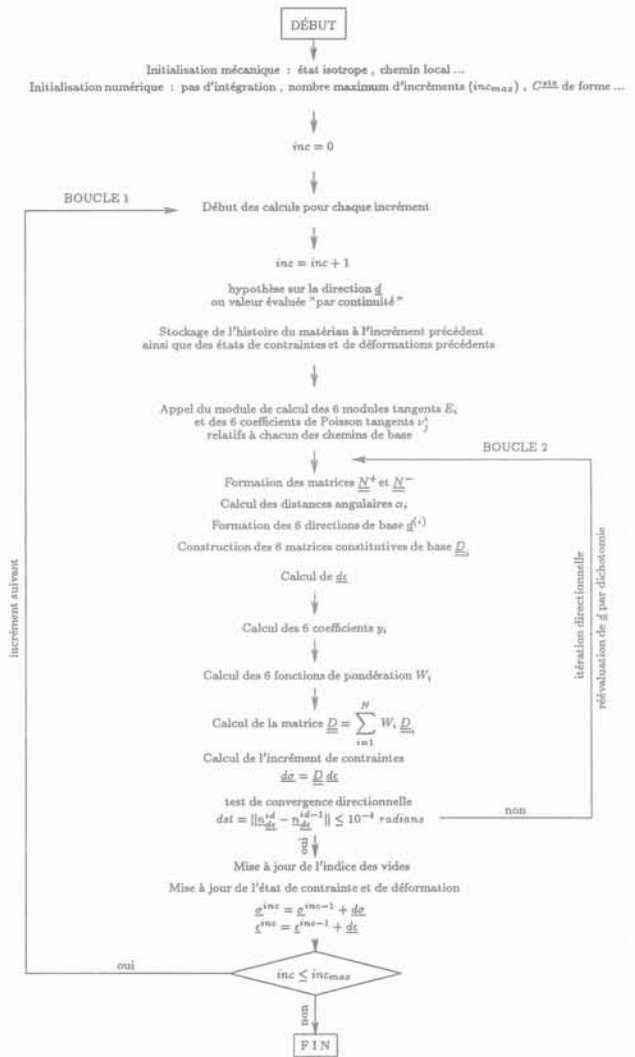


FIG. 9 Organigramme général de fonctionnement et d'intégration numérique (explicite, ordre 1 en temps) de la loi « ABD ».  
General flow chart of numerical integration of the law « ABD » (explicit method, order one in time).

### Comparaison avec la loi « D »

La loi « D » ([10], [11] et [12]) diffère de la présente loi par l'inversion des concepts de sollicitation incrémentale et réponse incrémentale (sollicitations incrémentales en vitesse de contrainte) et par l'interpolation, plus simple (pour la loi « D »), parce que les points représentatifs des chemins triaxiaux généralisés sont parfaitement répartis dans l'espace des sollicitations incrémentales. Une comparaison des réponses s'impose donc. La figure 13 présente l'enveloppe des réponses incrémentales (en incréments de contrainte) à la famille de sollicitations incrémentales suivantes :

– état de contrainte et de déformation initial (juste avant application des sollicitations incrémentales) isotrope :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0,05 \%$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 203 \text{ kPa}$$

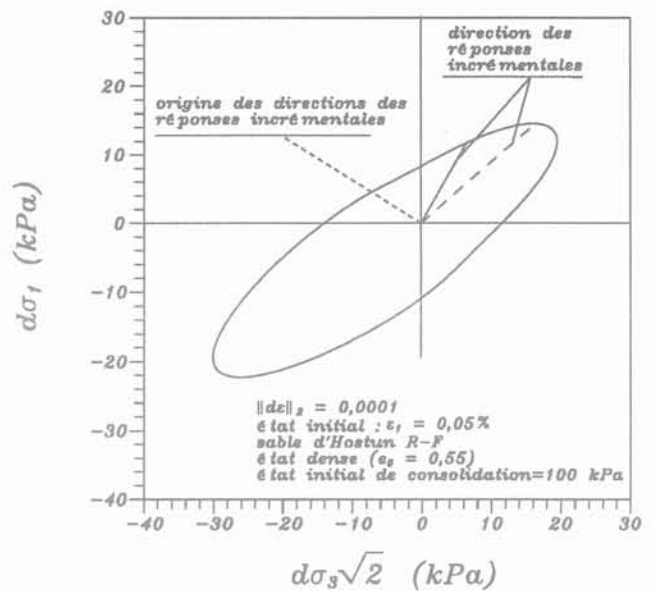
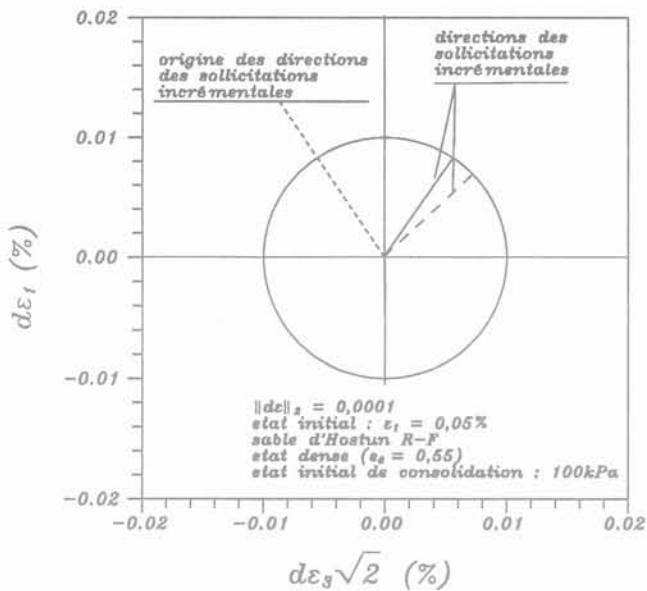


FIG. 10 Espace des sollicitations et des réponses incrémentales.  
Incremental loading and response space.

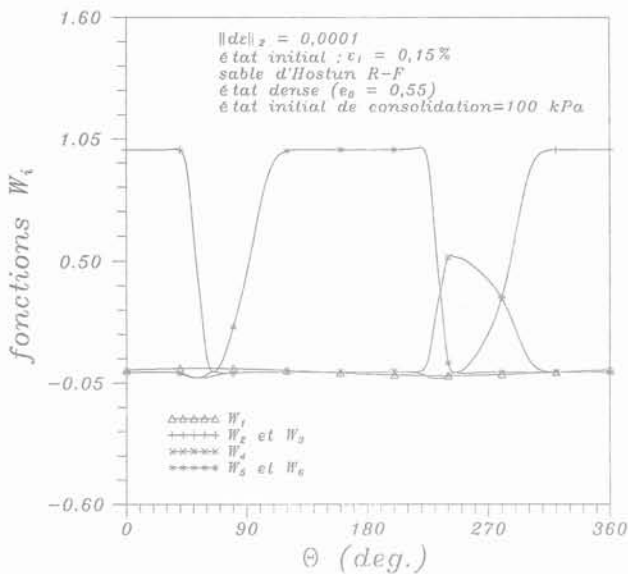


FIG. 11 Les fonctions de pondération  $W_i$ , état œdométrique.  
Evolution of the weight functions  $W_i$  oedometric state.

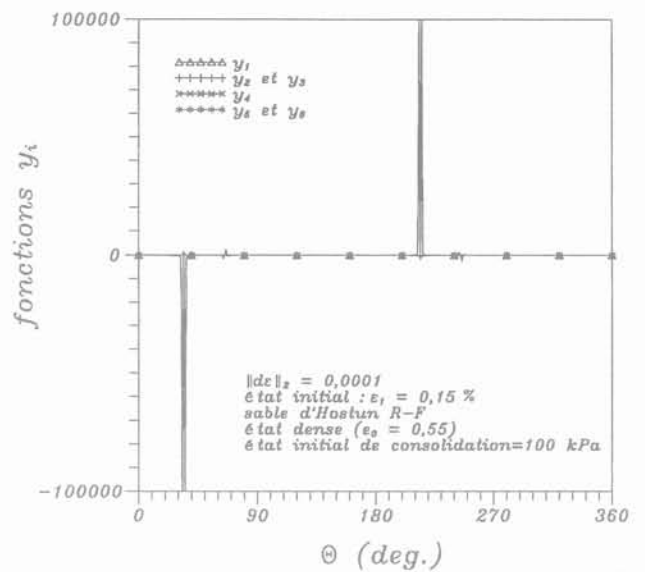


FIG. 12 Les fonctions  $Y_i$ , état œdométrique.  
The functions  $Y_i$ , oedometric state.

– sollicitation incrémentale dans le plan bissecteur des incréments de déformation :

$$d\epsilon_2 = d\epsilon_3$$

$$\|d\epsilon\|_2 = 10^{-4} = 0,01 \%$$

La figure 14 présente une enveloppe analogue pour une sollicitation identique, à partir d'un état œdométrique.

L'état de contrainte et de déformation initial juste avant d'appliquer les sollicitations incrémentales est caractérisé par :

$$\epsilon_1 = 0,15 \%$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0 \%$$

$$\sigma_1 = 145 \text{ kPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 121 \text{ kPa} \quad (K_0 = 0,83)$$

Les figures 13 et 14 montrent la continuité incrémentale des deux lois, ainsi qu'une concordance plus que qualitative des réponses incrémentales.

Ceci n'est pas très étonnant, puisque les chemins d'identification (triaxiaux de révolution drainés en compression et en extension) et leur formulation analytique restent les mêmes.

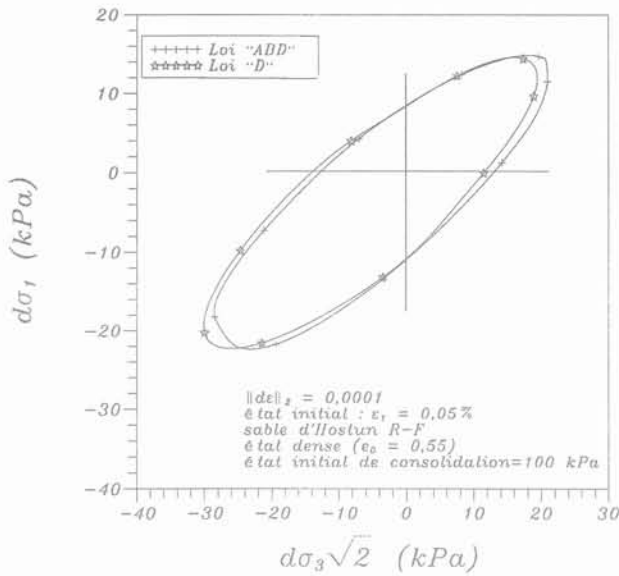


FIG. 13 Réponses incrémentales à partir d'un état isotrope.  
Incremental responses from an isotropic state.

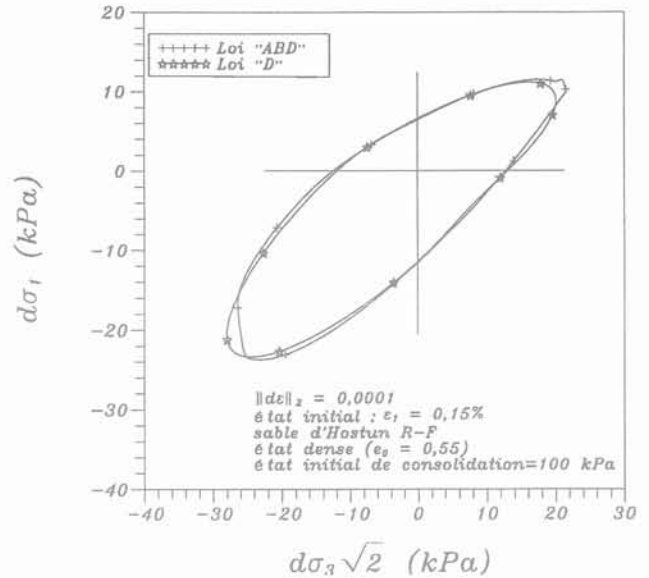


FIG. 14 Réponses incrémentales à partir d'un état œdométrique.  
Incremental responses from an oedometric state.

4

## Validation globale de la loi « ABD » sur des chemins classiques

### Identification

La loi « ABD » a été construite par interpolation entre les chemins de base que sont les chemins triaxiaux géné-

ralisés drainés ; il était nécessaire dans un premier temps de vérifier pour ces mêmes chemins de sollicitation, qu'il existait une coïncidence parfaite entre les deux lois, ce qui, à titre d'exemple, est vérifié à la figure 15, pour des chemins triaxiaux de révolution en extension, et pour diverses contraintes latérales initiales ( $\sigma_0 = 100, 200$  et  $400$  kPa).

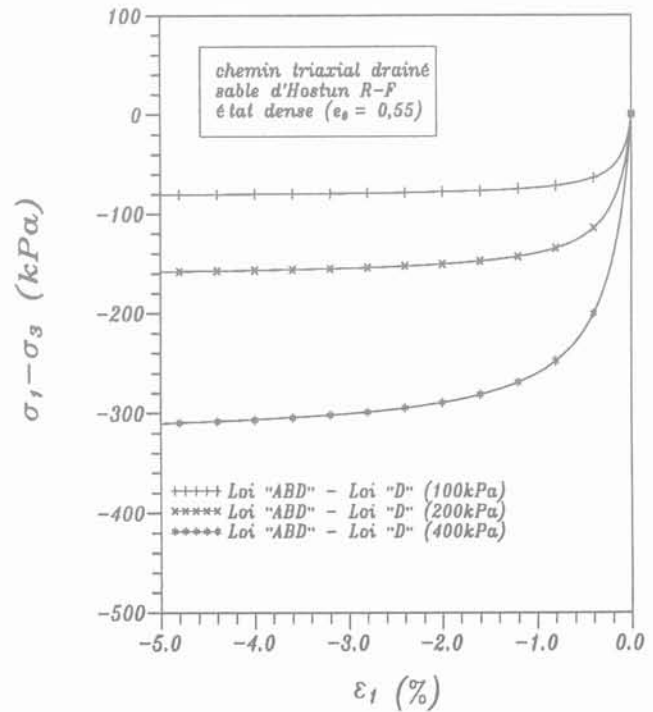
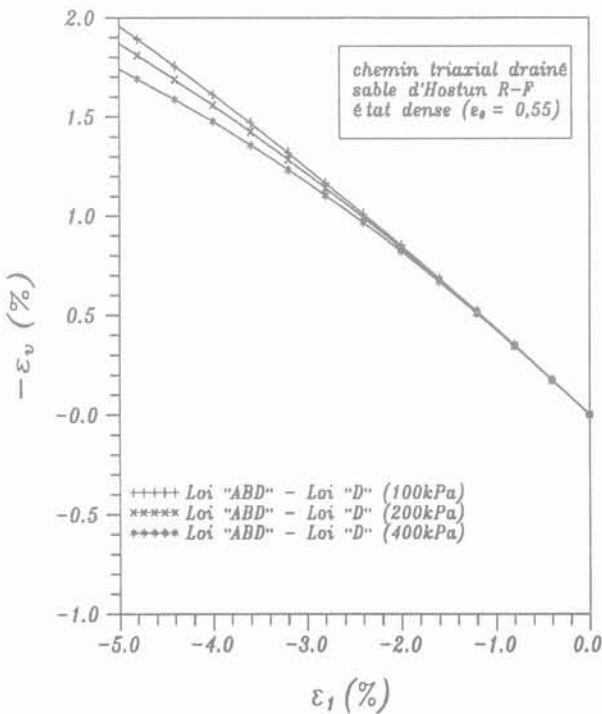


FIG. 15 Chemins de réponse à une sollicitation triaxiale drainée en extension.  
Response path from an extension triaxial drained path.

## Comparaison avec les essais expérimentaux

Une comparaison entre les résultats obtenus d'une part, par le modèle incrémental « ABD » et d'autre part, par les essais expérimentaux réalisés au laboratoire 3S (sols, solides et structure) à Grenoble par Meghachou (Konrad *et al.* [21]), sur un chemin à volume constant ( $\sigma_0 = 772$  kPa) montre que les prédictions fournies par le modèle sont généralement voisines de l'expérience (Fig. 16).

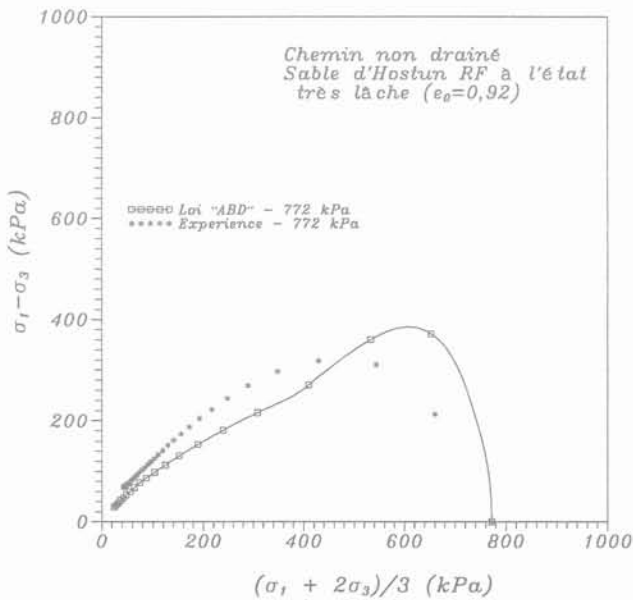
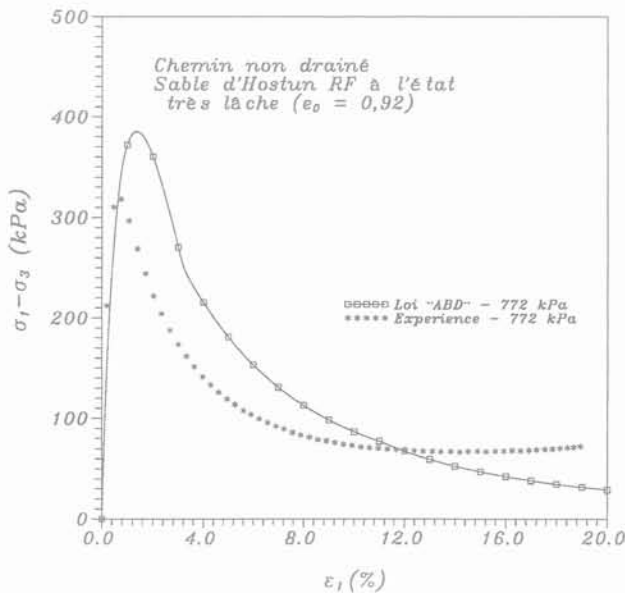


FIG. 16 Comparaison avec les essais expérimentaux sur un chemin à volume constant.

Comparison with the experimental tests on an undrained path.

## Chemin axisymétrique à volume constant (non drainé)

La figure 17 (plans  $q-p$  et  $q-\epsilon_1$ ) montre une comparaison entre les lois « ABD » et « D » sur chemin triaxial de révolution non drainé, pour deux contraintes latérales initiales (100 kPa et 200 kPa) sur le sable d'Hostun R-F, pour un état initial lâche ( $e_0 = 0,73$ ). Ces courbes permettent d'observer que l'intégration de la loi « ABD » peut se poursuivre jusqu'à l'origine du plan ( $q, p$ ) alors qu'il devient impossible d'inverser la loi « D », le déterminant s'annulant lorsque la pression moyenne a chuté jusqu'à 130 kPa pour la contrainte latérale élevée (200 kPa), et jusqu'à 55 kPa pour la contrainte latérale initiale faible (100 kPa).

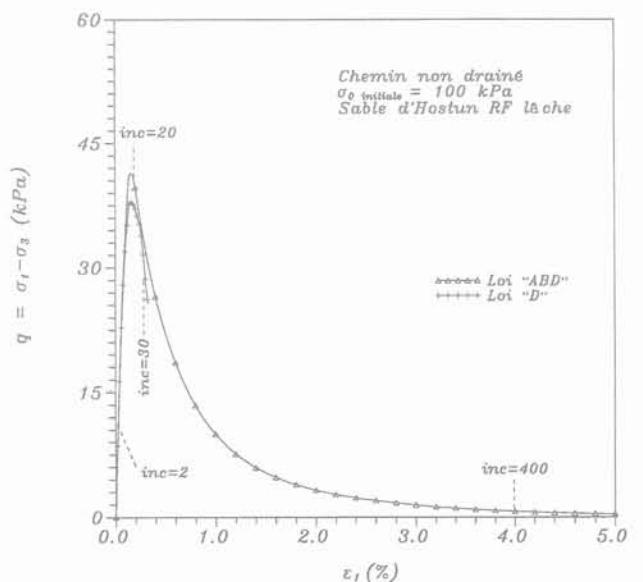
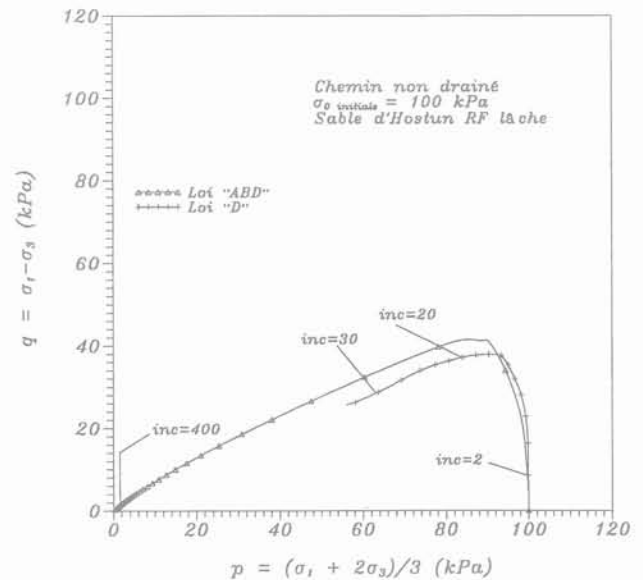


FIG. 17 Chemin de réponse à une sollicitation axisymétrique non drainée. Remarque : intégration de la loi « D » impossible jusqu'à l'origine du plan ( $p, q$ ).

Response path for an axisymmetric undrained loading path. Remark: the integration of the law "D" is impossible up to the origin of the ( $p-q$ ) plane.

Les figures 18, 19, 20 et 21 présentent une comparaison des réponses incrémentales des lois « ABD » et « D » à divers stades du chemin. La différence entre ces réponses incrémentales augmente lorsqu'on parcourt le chemin depuis l'état isotrope initial jusqu'à l'origine. Toutefois, les deux lois montrent en commun un étirement progressif de la réponse à l'approche de la surface limite.

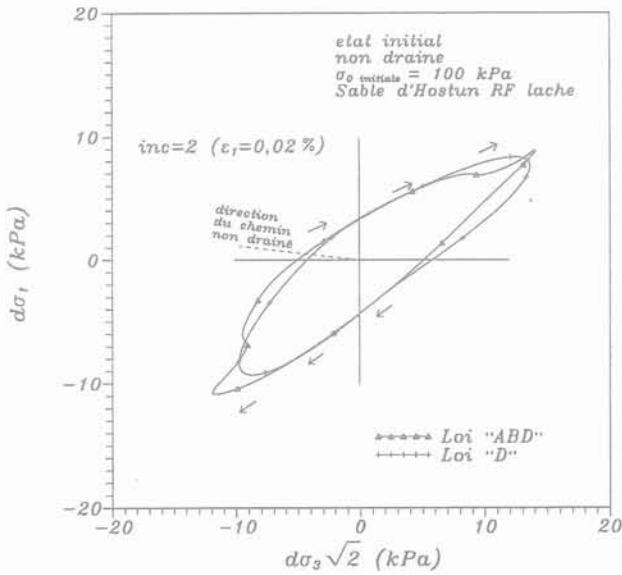


FIG. 18 Réponses incrémentales à partir d'un état non drainé (chemin non drainé, 2<sup>e</sup> incrément).  
Incremental responses from an undrained loading path (undrained path, 2<sup>nd</sup> increment).

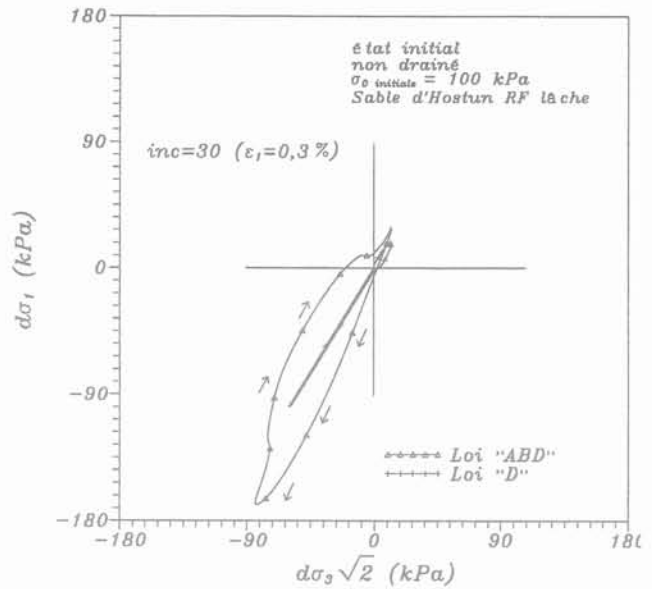


FIG. 20 Réponses incrémentales à partir d'un état non drainé (chemin non drainé, 30<sup>e</sup> incrément).  
Incremental responses from an undrained loading path (undrained path, 30<sup>th</sup> increment).

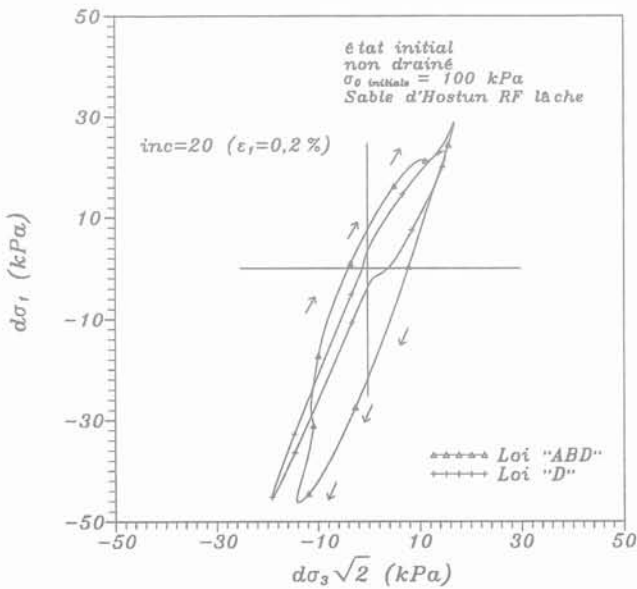


FIG. 19 Réponses incrémentale à partir d'un état non drainé (chemin non drainé, 20<sup>e</sup> incrément).  
Incremental responses from an undrained loading path (undrained path, 20<sup>th</sup> increment).

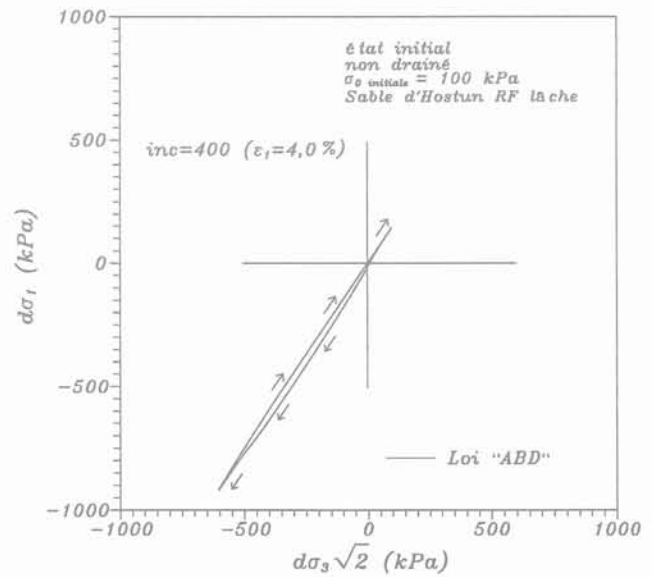


FIG. 21 Réponses incrémentales à partir d'un état non drainé (chemin non drainé, 400<sup>e</sup> incrément).  
Incremental responses from an undrained loading path (undrained path, 400<sup>th</sup> increment).

## Chemin œdométrique

Ce sont des chemins asymétriques à déformation latérale constante (nulle) et donc complètement définis en termes de vitesses de déformation. Les résultats sont présentés à la figure 22.

Les conditions initiales de l'essai sont :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0 \% \\ \sigma_1 &= \sigma_2 = \sigma_3 = 300 \text{ kPa}\end{aligned}$$

La figure 22 permet de conclure qu'il existe plus de différence entre les lois INL et octo-linéaire de Darve [10], qu'entre la loi INL (« D ») et la loi INL « ABD », pour ce type de chemin.

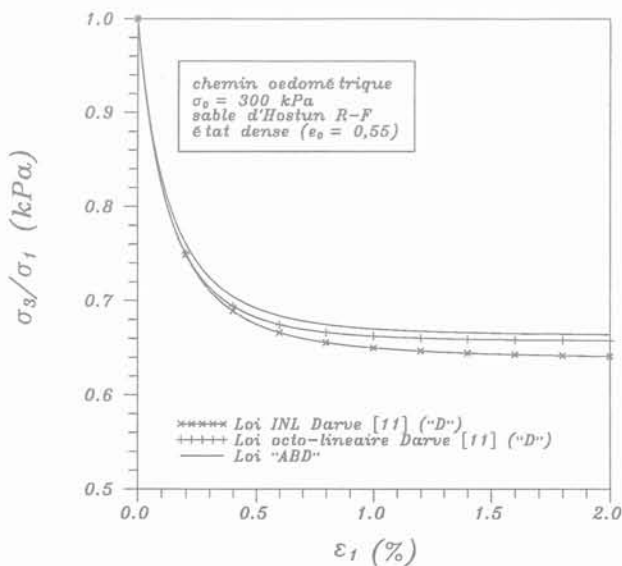
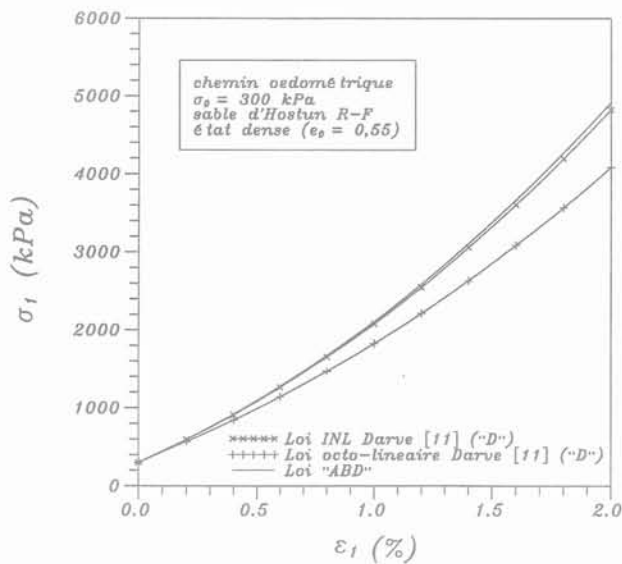


FIG. 22 Chemin de réponse à une sollicitation axisymétrique œdométrique.  
Response path for an axisymmetric œdometric path.

## Chemin isotrope

Ce sont des chemins définis par une sollicitation isotrope en déformation. La figure 23 montre sur le plan ( $\sigma_1, \varepsilon_1$ ) une comparaison entre la loi « ABD » et les deux versions octo-linéaire et non linéaire de la loi INL de Darve (« D ») sur un sable d'Hostun RF à l'état très lâche ( $e_0 = 0,92$ ) et pour un état de contrainte initial égal à 300 kPa. Nous remarquons que globalement les trois courbes sont assez voisines.

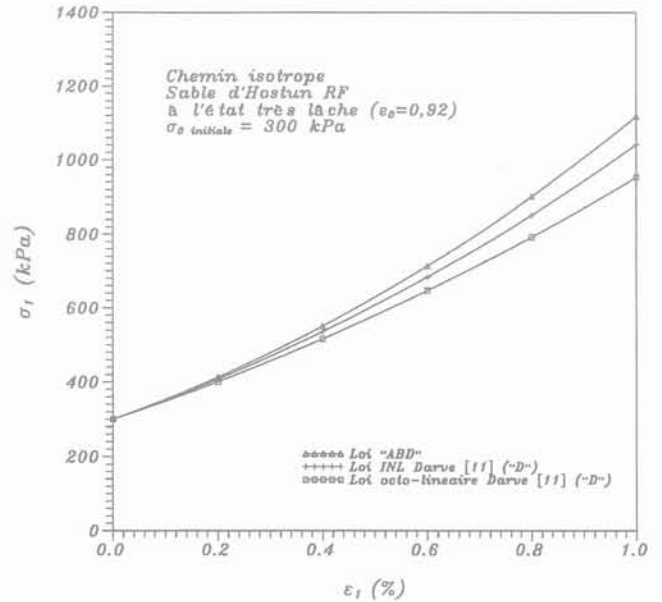


FIG. 23 Chemin de réponse à une sollicitation isotrope.  
Response path for an axisymmetric isotropic path.

## Temps CPU consommé par les deux lois

Les figures 24 et 25 montrent une comparaison des temps CPU consommés par les lois « D » et « ABD » pour un chemin non drainé sur sable d'Hostun RF lâche et pour deux états de confinement différents (100 et 200 kPa) – se référer à la figure 17 pour les essais correspondants –. Afin d'avoir une comparaison objective des résultats, les calculs correspondants aux deux lois ont été menés sur un même ordinateur (DECstation 5000/200).

Ces figures montrent l'intérêt de la loi « ABD », dérivée de « D », pour une utilisation en éléments finis déplacements, puisque la loi « ABD » consomme un temps CPU de 30 à 40 % inférieur à celui consommé par la loi « D », sur des chemins tels que le chemin non drainé, entièrement défini en déformations.

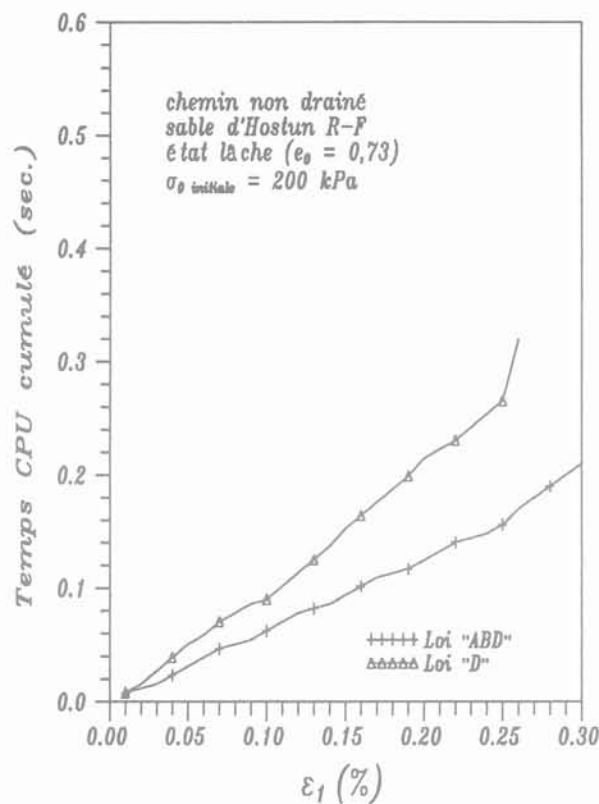
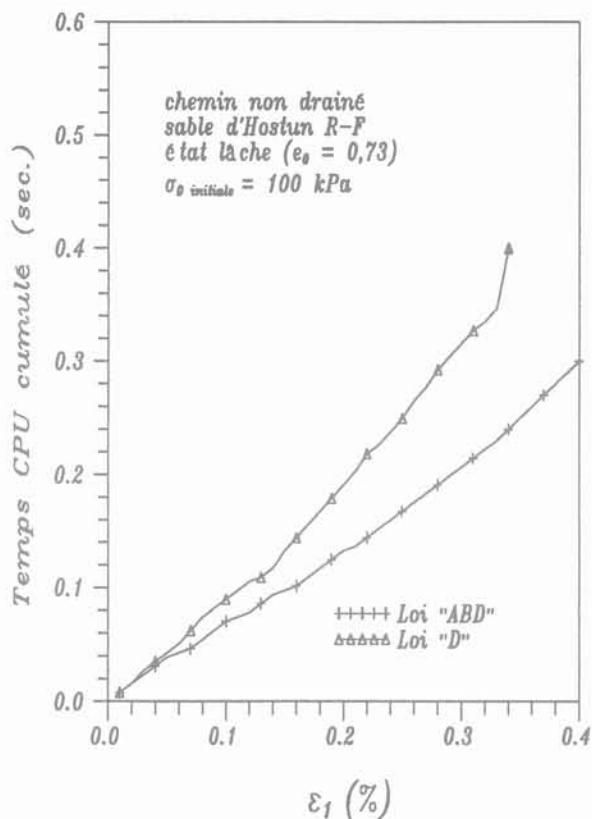


FIG. 24 Temps CPU consommé par les lois « D » et « ABD » sur chemin non drainé.  
CPU time needed for the integration of the laws « D » and « ABD » on an undrained path.

7

## Conclusion

Les auteurs ont mis au point pour les sols une loi de comportement incrémentalement non linéaire « ABD », dérivée de la loi « D » (Darve [10]), mais formulée explicitement en vitesses de déformation. Cette nouvelle loi, est constituée par interpolation des matrices constitutives sur chemins connus. Les formulations analytiques de ces chemins (triaxiaux généralisés de base, compression et extension) et les matrices constitutives sur ces chemins sont les mêmes pour les lois « ABD » et « D ».

Cette nouvelle loi est particulièrement adaptée à l'utilisation en éléments finis déplacements puisqu'elle permet d'éviter les itérations directionnelles ou constitutives. Par ailleurs, elle pourrait intégrer d'autres chemins de base (par exemple des chemins non drainés) si ceux-ci étaient formulés analytiquement, ce qui aurait pour effet d'améliorer considérablement la cohérence de la loi avec les résultats expérimentaux.

L'interpolation tridimensionnelle reste toutefois un exercice extrêmement délicat, dont on ne peut dire à l'heure actuelle s'il est définitivement résolu. Les comparaisons entre cette nouvelle loi incrémentalement non linéaire et la loi INL de Darve montrent généralement une bonne concordance avec semble-t-il une meilleure capacité pour cette nouvelle loi à simuler des chemins complètement définis en déformations, dans le cas non drainé notamment. Des comparaisons plus poussées restent évidemment à faire.

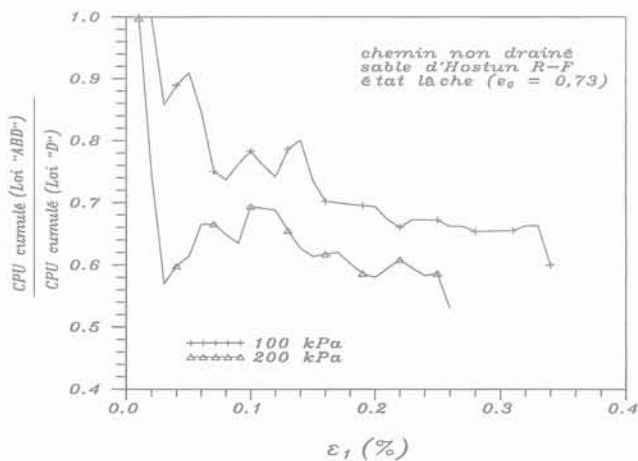


FIG. 25 Comparaison du temps CPU consommé par les lois « D » et « ABD » sur un chemin non drainé.  
Comparison of the CPU time needed for the integration of the laws « D » and « ABD » on an undrained path (ratio of CPU time).

## NOTATIONS

- $\underline{de}$  : pseudo-vecteur incréments de déformation.  
 $\underline{dc}$  : pseudo-vecteur incréments de contrainte.  
 $\underline{M}$  : tenseur constitutif direct.  
 $\underline{D}$  : tenseur constitutif dual.  
 $\underline{n}_{dc}$  : pseudo-vecteur des directions des incréments de contraintes.  
 $\underline{n}_{de}$  : pseudo-vecteur des directions des incréments de déformations.  
 $i$  : indice des chemins de base.  
 $W_i$  : fonctions d'interpolation associées à chaque chemin de base  $i$ .  
 $\underline{M}_i$  : matrice constitutive directe de base.  
 $\underline{D}_i$  : matrice constitutive duale de base.  
 $\nu_{ij}^+$  : pseudo-coefficients de Poisson en compression.  
 $\nu_{ij}^-$  : pseudo-coefficients de Poisson en extension.  
 $E_i^+$  : modules triaxiaux tangents en compression.  
 $E_i^-$  : modules triaxiaux tangents en extension.  
 $\underline{N}_i^+$  : matrices d'état en compression.  
 $\underline{N}_i^-$  : matrices d'état en extension.  
 $\alpha_i$  : distance angulaire entre le chemin courant et le chemin de base  $i$ .  
 $\underline{d}$  : direction courante.  
 $\underline{d}^{(i)}$  : direction de base n°  $i$ .  
 $d_i$  : distance géométrique entre les extrémités des directions  $\underline{d}^{(i)}$  et  $\underline{d}$ .  
 $y_i$  : fonctions de signe et de correction des fonctions  $W_i$ .  
 $x$  : coefficient de forme matérialisant la courbure des fonctions d'interpolation.  
 $\bar{\alpha}$  : moyenne algébrique des distances angulaires.  
 $\bar{\sigma}$  : moyenne des écarts entre  $\alpha_i$  et  $\bar{\alpha}$ .  
 $\beta_i$  : variable réduite.  
 $n, X$  : coefficients réels intervenant dans l'expression des fonctions  $y_i$ .  
 $k$  : paramètre de réglage du nombre des fonctions  $y_i$  positifs et négatifs.

## Annexe

### Jeux des paramètres utilisés pour le sable d'Hostun

Sable d'Hostun dense

$A_1 = 1$	$B_1 = 0,32$	$X_u = 680$
$A_2 = 0,7$	$B_2 = 0$	$X_n = 0,45$
$A_3 = 4,5$	$B_3 = 1,8$	$y_{00} = 0,55$
$A_4 = 0,86$	$B_4 = 0,28$	$c_0 = 0$
$A_5 = 0,98$	$B_5 = 2,01$	$c_e = 8$
$A_6 = 0,65$	$B_6 = 1,3$	$AA_4 = 0,1$
$A_7 = 0,09$	$B_7 = 0,095$	$BB_1 = 0,011$
$A_8 = 0,7$	$B_8 = 0,1$	
$A_9 = 65$	$B_9 = 7$	

Sable d'Hostun lâche

$A_1 = 1$	$B_1 = 0,055$	$X_u = 380$
$A_2 = 0,002$	$B_2 = 0,09$	$X_n = 0,45$
$A_3 = 2$	$B_3 = 1,8$	$y_{00} = 0,73$
$A_4 = 0,68$	$B_4 = 0,31$	$c_0 = 0$
$A_5 = 0,98$	$B_5 = 2,8$	$c_e = 8$
$A_6 = 0,6$	$B_6 = 1,3$	$AA_4 = 0,16$
$A_7 = 0,09$	$B_7 = 0,21$	$BB_1 = 0,005$
$A_8 = 0,7$	$B_8 = 0,1$	
$A_9 = 20$	$B_9 = 7$	

Sable d'Hostun très lâche

$A_1 = 1$	$B_1 = 0$	$X_u = 225$
$A_2 = 0,02$	$B_2 = 0,09$	$X_n = 0,508$
$A_3 = 4$	$B_3 = 15$	$y_{00} = 0,92$
$A_4 = 0,62$	$B_4 = 0,08$	$c_0 = 0$
$A_5 = 1,3$	$B_5 = 6$	$c_e = 8$
$A_6 = 0,615$	$B_6 = 1,2$	$AA_4 = 0,125$
$A_7 = 0,09$	$B_7 = 0,7$	$BB_1 = 0$
$A_8 = 0,7$	$B_8 = 1,2$	
$A_9 = 15$	$B_9 = 12$	



## Références

- [1] Alachaher A. – Une loi de comportement adaptée à la méthode des éléments finis, thèse de doctorat de l'Université Joseph-Fourier de Grenoble (à paraître).
- [2] Aubry D., Hujeux J.-C., Las-soudière F., Meimon Y. – A double memory model with multiple mechanisms for cyclic behavior, *Constitutive Relations for Soils*. Edited by Gudehus, Darve and Vardoulakis, published by Balkema (Rotterdam), Grenoble, 1982.
- [3] Bazant Z.P. – Endochronic inelasticity and incremental plasticity, *Int. J. of Solids and Structures*, 14, pp. 691-714, 1978.
- [4] Boulon M., Hoteit N., Marchina P. – A complete constitutive law for soil-structure interfaces, *Int. Conf. on Num. Methods in Geomechanics (ICONMIG)*, Innsbruck, Austria, 1988.
- [5] Boulon M., Garnica P. – Constitutive interpolation and soil structure directionally dependent interface law, *Proc. of second ENUMGE*, Santander, Spain, 1990.
- [6] Boulon M., Darve F., El Gamali H. – Use of incrementally non linear constitutive equations by the finite element method, *Proceedings of the 7th international conference on computer methods and advances in geomechanics*, editions Balkema, Rotterdam/Brookfield, 1991.
- [7] Charlier R., Chambon R., Desrues J., Hammad W. – Shear band bifurcation in soil modelling : a rate type constitutive law for explicit localisation, *Third Int. Conf. on Constitutive laws for Engng Materials*, Tucson, Ed. Desai C.S. and Kremple E., ASME Press, pp. 399-402, 1991.
- [8] Chambon R., Renoud-Lias B. – Incremental non linear stress-strain relationship for soils and integration by FEM, *Int. Conf. on Num. Meth. in Geomech.* Aachen, ed. W. Wittke, Balkema, Rotterdam, vol. 1, pp. 405-413, 1979.
- [9] Cuellar V. – An endochronic model for dense sand, *Constitutive Relations for Soils*, éd. Gudehus, Darve, Vardoulakis, publ. Balkema, pp. 357-367, 1984.
- [10] Darve F. – Une loi rhéologique incrémentale non linéaire pour les solides, *Mech. Res. Com.* 7, n° 4, pp. 205-212, 1980.
- [11] Darve F. – Incrementally non-linear relationships, constitutive equation and modelling in geomaterials, Paris, Presses de l'ENPC, 1990.
- [12] Darve F., Chau B. – Constitutive instability in incrementally non-linear modelling in constitutive laws for engineering materials, C.S. Desai Ed., pp. 301-310, 1987.
- [13] Darve F., Dendani H. – An incrementally non-linear constitutive relation and its prediction, *Proceedings of the International Workshop on Constitutive Equations for Granular Non cohesive Soils*, Cleveland, pp. 237-254, 1987.
- [14] Desrues J., Chambon R., Hammad W., Charlier R. – Soil modelling with regard to consistency : CLoE, a new rate type constitutive model, *Third Int. Conf. on Constitutive laws for Engng Materials*, Tucson, Ed. Desai C.S. and Kremple E., ASME Press, pp. 395-398, 1991.
- [15] Desrues J., Chambon R. – A new rate type constitutive model for geomaterials ; CLoE, *Proc. Int. Workshop « Modern Approaches to Plasticity »*, Horton, Greece, 1992.
- [16] Di Benedetto H., Darve F. – Comparaison des lois rhéologiques en cinématique rotationnelle, *J. Méc. Théor. Appl.*, vol. 2, n° 5, pp. 769-798, 1983.
- [17] Gudehus G. – A comparaison of some constitutive laws for soils under radially symmetric loading and unloading, *Third international conference on numerical methods in geomechanics*, Edition W. Wittke, publ. Balkema, vol. 4, pp. 1309-1324, 1979.
- [18] Hujeux J.-C. – « Une loi de comportement pour le chargement cyclique des sols » in *Le Génie parasismique*, Paris, Presses de l'ENPC, 1985.
- [19] Kolymbas D. – A rate-dependent constitutive equation for soils, *Mech. Res. Com.* 4, n° 6 pp. 367-372, 1977.
- [20] Kolymbas D. – A constitutive law of the rate-type for soils. Position, calibration and prediction. *Constitutive relations for soils*. Edited by Gudehus, Darve and Vardoulakis, published by Balkema (Rotterdam), Grenoble, 1982.
- [21] Konrad J.M., Flavigny E., Meghachou M. – Comportement non drainé du sable d'Hostun lâche, *Revue Française de Géotechnique*, n° 54, pp. 53-64, 1991.
- [22] Lanier J. – Étude d'une loi de comportement pour les matériaux non visqueux, *J. Mécanique* 18 (1), pp. 175-195, 1979.
- [23] Prevost J.H. – A simple plasticity theory for frictional cohesionless soils, *Journal of soils dynamic and earthquake engineering*, vol. 4, n° 1, 1985.
- [24] Valanis K.C. – A theory of viscoplasticity without a yield surface, *Archives of Mechanics*, Varsovie, n° 23, pp. 517-551, 1971.